SESSION DE 1978

MATHÉMATIQUES

Épreuve n° 1 (exercices)

DURÉE : 4 heures

PREMIER EXERCICE

Le repère étant orthonormé, on considère la courbe gauche définie par la représentation paramétrique :

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3$$

1° Équation du plan osculateur au point courant.
Équations de l'intersection D de ce plan avec le plan xOy.

2° Déterminer et construire l'enveloppe E de D quand t décrit l'ensemble des réels.

3° Calculer la longueur de l'arc de cette courbe E joignant le point d'abscisse zéro au point d'abscisse un.

DEUXIÈME EXERCICE

L'équation polaire d'une courbe plane est $\rho = f(\theta)$;
$f(\theta)$ d'une part, est telle que $f(0) = 0$, d'autre part satisfait à l'équation différentielle :

$$\rho \sin \theta + \rho' \cos \theta = \theta + \sin \theta \cos \theta$$

1° Expliciter $f(\theta)$.

2° Construire l'arc de courbe $\rho = f(\theta)$ correspondant à $\theta \in [0, \pi]$.
On calculera, avec une erreur inférieure à 1/10 radian, l'angle qui rend ρ maximal.

3° On considère la fonction F impaire, périodique et de période 2π dont la restriction à $[0, \pi]$ est f. Quel est son développement en série de Fourier, valable pour tout θ réel ?

TROISIÈME EXERCICE

Parmi les primitives de f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2 + 3\cos^2 x}$, on appelle F celle telle que $F(0) = 0$.

1° Expliciter F.

2° Variations et graphe de F.

3° Calculer $\displaystyle I = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx.$

QUATRIÈME EXERCICE

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé, on considère le cercle C d'équation $x^2 + y^2 - x = 0$ et le domaine D limité par C.

1° Transformer l'intégrale curviligne :

$$\int (3x^5 + 15xy^4)\, dy - 10x^2y^3\, dx$$

prise le long de C dans le sens direct en une intégrale double étendue dans D. Calculer cette intégrale double.

2° Que devient le cercle C dans la transformation géométrique qui, au point m d'affixe $z = x + iy$, fait correspondre le point M d'affixe

$$Z = \frac{3z - 2}{z - 1} \ ?$$

CINQUIÈME EXERCICE

On considère l'équation $x^3 - x^2 + \lambda = 0$, x étant l'inconnue et λ un paramètre réel ($x \in \mathbb{C}$).

1° Déterminer λ pour que l'équation admette une racine double. Résoudre alors l'équation.

2° x_1, x_2, x_3 étant les 3 racines, déterminer λ pour que :

$$x_1 x_2 x_3 + 2\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) = 0.$$

Résoudre alors l'équation.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail